Section A1 (M')

MATHEMATIQUES I (4 h)

Soit E l'ensemble des fonctions φ continûment dérivables sur [0, 1], telles que

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) > 0 .$$

Pour tout élément φ de E, on pose

$$J(\varphi) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + [\varphi'(t)]^2}}{\varphi(t)}\, dt .$$

I

On suppose, dans cette partie, qu'il existe un élément de E, noté f, admettant une dérivée seconde continue sur]0, 1[et vérifiant

$$\forall \varphi \in E \qquad J(f) \leqslant J(\varphi) .$$

1° Montrer que, pour toute fonction h continûment dérivable sur [0, 1] telle que

$$h(0) = h(1) = 0 ,$$

on a

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(t)}{f(t)\sqrt{1 + [f'(t)]^2}} h'(t) - \frac{\sqrt{1 + [f'(t)]^2}}{[f(t)]^2} h(t) \right) dt = 0 .$$

(Indication : Considérer $J(f + sh)$, pour s réel assez petit en valeur absolue.)

2° Montrer que f vérifie sur]0, 1[la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{f(t)\sqrt{1 + [f'(t)]^2}} \right) + \frac{\sqrt{1 + [f'(t)]^2}}{[f(t)]^2} = 0 .$$

La simplification de cette relation conduit à une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.

En déduire l'expression explicite de f.

II

On considère l'équation différentielle

$$(*) \qquad u \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 1 = 0 .$$

1° Soient x et y des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe un plus grand intervalle ouvert, $]\alpha(x, y), \beta(x, y)[$, contenant [0, x], sur lequel l'équation (*) admette une solution g vérifiant

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = y .$$

Démontrer que cette solution g est déterminée de façon unique sur $]\alpha(x, y), \beta(x, y)[$ et caractériser son graphe de façon géométrique.

On pose, pour $t \in]\alpha(x, y), \beta(x, y)[$,

$$g(t) = v(x, y, t)$$

et cette notation est conservée dans toute la suite.

2° Soit

$$\Omega = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y > 0, t \in]\alpha(x, y), \beta(x, y)[\}$$

Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et que la fonction v, définie sur Ω, est continue et admet des dérivées partielles premières et secondes continues (qu'on ne demande pas d'expliciter).

III

1° Soit φ un élément de E. On pose

$$\tilde{\Omega} = \{ (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R} ; (x, \varphi(x), t) \in \Omega \}$$

et on désigne par w la fonction définie sur $\tilde{\Omega}$ par

$$w(x, t) = v(x, \varphi(x), t) .$$

.../...

a Montrer que $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que sur $\tilde{\Omega}$ les dérivées partielles

$$\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}$$

sont définies et continues.

b. Démontrer que la fonction

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{w\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}}\right] + \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}}{w^2}$$

est identiquement nulle sur $\tilde{\Omega}$.

c. En déduire, pour tout x de $]0, 1[$,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}}{w}\right](x, t)\, dt = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial t}(x, x)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{1+\left[\frac{\partial w}{\partial t}(x, x)\right]^2}}.$$

d. On pose, pour $x \in]0, 1[$,

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+[\varphi'(t)]^2}}{\varphi(t)}\, dt - \int_0^x \left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}}{w}\right](x, t)\, dt.$$

Montrer que I est croissant sur]0, 1[.

e. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} I(x).$$

2° Montrer qu'il existe une et une seule fonction ψ dans E telle que

$$\forall\, \varphi \in E \qquad J(\psi) \leqslant J(\varphi).$$

Déterminer ψ explicitement.